



TUGAS AKHIR - SM141501

**KENDALI OPTIMAL TERHADAP GLUKOSA-
INSULIN PENDERITA DIABETES MELLITUS
TIPE-1 PADA MODEL DINAMIK DENGAN
MENGUNAKAN METODE PRINSIP MINIMUM
PONTYAGIN**

DUWI WIDAYATI
NRP 1212 100 011

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Mardijah, M.T
Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

Halaman ini sengaja dikosongkan.



FINAL PROJECT - SM141501

**OPTIMAL CONTROL TOWARDS DIABETES
MELLITUS TYPE-1 PATIENT'S GLUCOSE-
INSULIN IN DYNAMIC MODEL USING
PONTYAGIN MINIMUM PRINCIPLE METHOD**

DUWI WIDAYATI
NRP 1212 100 011

Supervisors:
Dr. Dra. Mardijah, M.T
Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LEMBAR PENGESAHAN

**KENDALI OPTIMAL TERHADAP GLUKOSA-
INSULIN PENDERITA DIABETES MELLITUS TIPE-1
PADA MODEL DINAMIK DENGAN MENGGUNAKAN
PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN**

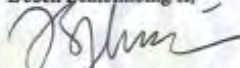
***OPTIMAL CONTROL TOWARDS DIABETES
MELLITUS TYPE-1 PATIENT'S GLUCOSE-INSULIN IN
DYNAMIC MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM
PRINCIPLE METHOD***

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada
Bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
DUWI WIDAYATI
NRP. 1212100011

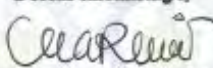
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,



Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si
NIP. 19870728 201404 2 001

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dra. Mardijah MT
NIP. 19670114 199102 2 001

Mengetahui,



Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Juli 2016

KENDALI OPTIMAL TERHADAP GLUKOSA- INSULIN PENDERITA DIABETES MELLITUS TIPE-1 PADA MODEL DINAMIK DENGAN MENGUNAKAN METODE PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

Nama Mahasiswa : Duwi Widayati
NRP : 1212 100 011
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T
2. Tahiyyatul Asfihani, S.Si, M.Si

Abstrak

Diabetes Mellitus (DM) Tipe-1 merupakan suatu keadaan yang diakibatkan kerusakan sel- β pankreas maupun idiopatik sehingga produksi insulin terhenti. Karena itu, dilakukan terapi pemberian insulin agar keseimbangan kadar glukosa darah tetap terjaga. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, diperlukan adanya pengendalian terhadap suplai insulin dari luar (eksogenus). Kemudian, diterapkan teori kendali optimal dalam model dinamik glukosa darah-insulin menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Dalam Tugas Akhir ini, ditunjukkan bahwa kadar glukosa darah menurun seiring dengan penurunan kadar insulin dalam tubuh, karena adanya suplai insulin eksogenus.

Kata-kunci: *Glukosa Darah, Insulin, Kendali Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

OPTIMAL CONTROL TOWARDS DIABETES MELLITUS TYPE-1 PATIENT'S GLUCOSE- INSULIN IN DYNAMIC MODEL USING PONTYAGIN MINIMUM PRINCIPLE METHOD

Name : Duwi Widayati
NRP : 1212 100 011
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Dr. Dra. Mardlijah, M.T
2. Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si

Abstract

Diabetes Mellitus Type-1 is one condition which is caused by pancreas β sel damage or idioptaik, so that insulin production has stopped. Therefore, insulin giving therapy is done so the balance of the blood glucose pressure is stable. The action that is needed to solve those problems is first it is needed a control towards insulin supplay from outside (eksogenous). And then, it is applied optimal control theory in dynamic model of insulin blood glucose using Pontryagin Minimum Principle. In this study, it is showed that blood glucosee pressure decreaseed along with the decrease of insulin pressure in the body because of the eksogenous insulin therapy.

Key-words: *Blood Glucose, Insulin, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Diabetes Mellitus Tipe-1	7
2.2 Model Glukosa Darah-Insulin	8
2.3 Sifat-sifat Sistem	12
2.3.1 Teori Kestabilan	12
2.3.2 Teori Keterkendalian	13
2.3.3 Teori Keteramatan	13

2.4	Teori Kendali Optimal	14
2.5	Prinsip Minimum Pontryagin	15
2.6	Runge Kutta Orde-4	18
BAB III	METODE PENELITIAN	21
3.1	Studi Literatur	21
3.2	Mengkaji Model Glukosa Darah-Insulin	21
3.3	Analisis Sifat Sistem	21
3.4	Menentukan Formulasi Masalah Kendali Optimal	22
3.5	Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal	22
3.6	Simulasi	22
3.7	Analisis Hasil Simulasi	23
3.8	Penarikan Kesimpulan	23
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	25
4.1	Analisis Sifat Sistem	25
4.1.1	Analisis Kestabilan	26
4.1.2	Analisis Keterkontrolan	26
4.1.3	Analisis Keteramatan	27
4.2	Formulasi Kendali Optimal	27
4.3	Penyelesaian Kendali Optimal	28
4.4	Solusi Numerik	34
4.5	Analisis Hasil Simulasi	38
BAB V	PENUTUP	45
5.1	Kesimpulan	45
5.2	Saran	46
	DAFTAR PUSTAKA	47
	LAMPIRAN A Source Code Matlab	49
	LAMPIRAN B Source Code GUI	55
	LAMPIRAN C Biodata Penulis	65

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem Regulasi Glukosa Darah-Insulin	11
Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian	24
Gambar 4.1	Kadar Glukosa Darah degan Kendali dan Tanpa kendali	40
Gambar 4.2	Kadar Insulin Tanpa Kendali dan Kadar Insulin dengan Kendali	41
Gambar 4.3	kendali $u^*(t)$	42

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Input Parameter	39
Tabel 4.2	Simulasi Kadar Glukosa Darah-insulin . . .	43
Tabel 4.3	Nilai Fungsi Obyektif	43

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Simbol

H	Fungsi Hamiltonian.
L	Fungsi Lagrange.
J	Fungsi Objektif.
$I = [t_0, t_f]$	Periode waktu yang direncanakan.
g	Penyimpangan kadar glukosa darah dari nilai setimbangnya.
h	Penyimpangan kadar insulin darah dari nilai setimbangnya.
p	Rate glukosa dari luar.
k	Rate insulin dari luar.
a_1, a_2, a_3, a_4	Parameter.
η, ρ	Faktor Bobot.
g_d	Kadar glukosa yang diinginkan.
λ_1, λ_2	Variabel ko-keadaan (<i>costate</i>).
u	Variabel kendali.
w_1, w_2	Pengali Penalti .
a, b	Batas atas dan batas bawah dari kendali.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang akan dibahas dalam Tugas Akhir. Kemudian dari permasalahan tersebut akan disusun ke dalam rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mencapai tujuan yang ingin diperoleh serta manfaat yang akan didapat. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Menurut American Diabetes Association (ADA) 2010, Diabetes Mellitus (DM) merupakan suatu kelompok penyakit metabolik dengan karakteristik hiperglikemia yang terjadi karena kelainan sekresi insulin, kerja insulin atau keduanya. Secara umum, penyakit ini dibedakan menjadi dua, yaitu Diabetes Mellitus Tipe-1 dan Diabetes Mellitus Tipe-2. Diabetes Mellitus Tipe-1 yang keadaannya diakibatkan kerusakan sel- β pankreas oleh proses autoimun maupun idiopatik sehingga produksi insulin terhenti. Diabetes Mellitus Tipe-2, dimana insulin tidak bisa membawa glukosa masuk ke dalam jaringan karena terjadi resistensi insulin yang merupakan turunya kemampuan insulin untuk merangsang pengambilan glukosa oleh jaringan perifer. Umumnya, DM Tipe-2 ini sering terdiagnosis setelah terjadi komplikasi[1]. Maka dari itu penderita DM Tipe-1 membutuhkan terapi pemberian insulin agar keseimbangan kadar glukosa darah tetap terjaga. Metode pengobatan yang digunakan pada

penderita DM Tipe-1 adalah dengan suntikan insulin atau dengan infus insulin lewat pompa insulin [2].

Estimasi terakhir penderita Diabetes Mellitus di dunia berdasarkan data International Diabetes Federation (IDF) adalah sebanyak 382 juta orang pada tahun 2013 dan diperkirakan akan meningkat sebanyak 592 juta orang di tahun 2035. Sedangkan penderita Diabetes Mellitus di Indonesia saat ini sudah mencapai 8,4% di tahun 2015[3]. Penyakit ini sangat ditakuti oleh semua kalangan, bahkan menurut Badan Kesehatan Dunia (WHO), lebih dari 80% kematian akibat penyakit ini terjadi pada negara yang berpenghasilan rendah dan menengah[4]. Berdasarkan data IDF tahun 2014 sudah 4,9 juta jiwa di seluruh dunia meninggal akibat menderita penyakit ini[3].

Penderita DM Tipe-1 sampai saat ini belum dapat disembuhkan, namun kualitas hidup penderita dapat dipertahankan seoptimal mungkin dengan pengendalian metabolik yang baik. Namun kurangnya monitoring secara berkala dalam pemberian dosis insulin pada penderita mengakibatkan glukosa darah tidak dapat mencapai nilai normal sehingga biaya yang dikeluarkan terus meningkat. Hal ini juga menyebabkan berbagai masalah komplikasi seperti penyakit jantung, stroke, ginjal, mata (kebutaan), amputasi serta beberapa penyakit lain. Sehingga perlu adanya kendali optimal pada pemberian dosis insulin untuk penderita DM Tipe-1 tersebut[1].

Studi mengenai model glukosa darah-insulin telah banyak dilakukan dengan berbagai macam analisis. Dalam penelitian yang dilakukan oleh Keh-Dong Shiang dkk[5], yang menganalisis model komputasi dinamik untuk deteksi penderita diabetes, namun tidak menggunakan kendali dalam penanganan penderita diabetes. Sedangkan untuk beberapa kasus seperti penderita Diabetes Mellitus Tipe-1 sangat

memerlukan terapi insulin untuk mempertahankan kualitas hidup penderita. Untuk itu sangat dibutuhkan penelitian mengenai model dinamik glukosa darah-insulin yang terdapat suplai insulin dari luar serta kendali yang optimal dalam pemberian dosis yang tepat untuk mencegah terjadinya komplikasi dan dapat menekan biaya yang dikeluarkan. Penelitian yang pernah dilakukan oleh Saadet Ulas Acikgoz[7], dijelaskan bahwa teori kendali optimal dapat digunakan untuk mendapatkan kadar insulin yang optimal.

Berdasarkan permasalahan diatas, pada penelitian Tugas Akhir ini penulis menerapkan teori kendali optimal pada model dinamik glukosa darah-insulin. Penelitian ini menitikberatkan pada suplai insulin dalam penanganan penderita DM Tipe-1. Tujuannya adalah untuk mengetahui kadar insulin secara optimal sehingga mampu menurunkan kadar glukosa darah penderita DM Tipe-1 hingga pada batas normal. Pembahasan ini dimulai dengan deskripsi model glukosa darah-insulin, kemudian menganalisis sifat-sifat sistem, dilanjutkan dengan pembentukan fungsi obyektif dan penyelesaian kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Setelah itu dilakukan simulasi terhadap permasalahan kendali optimal tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan kendali optimal dari model dinamik glukosa darah-insulin dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin?
2. Bagaimana simulasi kendali optimal glukosa darah-insulin dengan menggunakan *Software* Matlab?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini nantinya akan dibatasi ruang lingkup pembahasannya, antara lain:

1. Model dinamik glukosa darah-insulin dan parameter-parameter yang digunakan berdasarkan referensi[5].
2. Diabetes yang akan dibahas adalah Diabetes Mellitus Tipe-1.
3. Kondisi internal dan eksternal penderita Diabetes Mellitus Tipe-1 seperti berat badan, tinggi badan, usia, dan olahraga diabaikan.
4. Penyelesaian kendali optimal menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir yang ingin dicapai berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan kendali optimal dari model dinamik glukosa darah-insulin dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin.
2. Mensimulasikan kendali optimal dari model dinamik glukosa darah-insulin dengan menggunakan *Software* Matlab.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah dapat memberikan informasi bahwa penyelesaian kendali optimal dapat menjadi solusi yang optimal dalam pemberian insulin terhadap penderita Diabetes Mellitus Tipe-1. Pemberian ini dilakukan agar kadar glukosa darah tetap

stabil atau dalam kisaran normal sehingga dapat mencegah terjadinya komplikasi dan dapat menekan biaya yang dikeluarkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum Diabetes Mellitus Tipe-1 dan model matematika dari sistem dinamik glukosa darah-insulin Ackerman. Selain itu, bab ini juga berisikan dasar-dasar teori yang mendukung proses pengerjaan Tugas Akhir, antara lain teori kestabilan, keterkendalian, keteramatan, kendali optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, serta metode Runge Kutta Orde-4.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, pendeskripsian model, menganalisis sifat sistem, menentukan formulasi dan penyelesaian kendali optimal. Selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis terhadap hasil yang didapat. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan menguraikan mengenai analisis sifat

sistem, serta menguraikan formulasi dan penyelesaian masalah kendali optimal dalam model dinamik glukosa darah-insulin pada penderita Diabetes Mellitus Tipe-1, serta penjelasan mengenai hasil simulasi yang diperoleh.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan tentang DM Tipe-1. Selain itu dijelaskan pula mengenai model matematika glukosa darah-insulin. Selanjutnya, diuraikan teori-teori yang mendukung penelitian antara lain, teori sifat-sifat sistem, teori kendali optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, serta metode Runge Kutta Orde-4.

2.1 Diabetes Mellitus Tipe-1

Menurut *American Diabetes Association* (ADA) tahun 2010, Diabetes Mellitus merupakan suatu kelompok penyakit metabolik dengan karakteristik hiperglikemia yang terjadi karena kelainan sekresi insulin, kerja insulin, atau keduanya. Sedangkan DM Tipe-1 terjadi karena kelainan sistemik akibat terjadinya gangguan metabolisme glukosa yang ditandai oleh hiperglikemia kronik. Keadaan ini diakibatkan oleh kerusakan sel- β pankreas oleh proses autoimun maupun idiopatik sehingga produksi insulin terhenti[1].

Istilah Diabetes Mellitus berasal dari bahasa Yunani kuno yaitu diabetes yang berarti "sypon", menunjukkan pembentukan urin yang berlebihan, karena penderita DM sering buang air kecil dan mellitus berasal dari kata "meli" yang berarti madu, karena urin pasien berisi banyak gula. Sehingga penyakit ini sering disebut "Kencing Manis"[2].

Kadar glukosa darah puasa dianggap normal bila kadar glukosa darah puasa adalah 70 - 120 mg/dL. Jika kadar glukosa darah tinggi (> 180 mg/dL) maka penderita

DM Tipe-1 mengalami ketoasidosis diabetik apabila tidak mendapat terapi insulin. Ketoasidosis merupakan suatu keadaan darurat medik akibat gangguan metabolisme glukosa dengan tanda-tanda hiperglikemia. Hiperglikemia yang berlangsung lama dapat memperburuk gangguan kesehatan seperti kelumpuhan lambung dan inveksi jamur pada vagina, bahkan berujung pada kematian[2]. Untuk itu perlu adanya terapi pemberian insulin pada pasien DM Tipe-1, tujuannya adalah menjaga kadar glukosa darah berada dalam kisaran normal dan mencegah atau meminimalkan terjadinya komplikasi diabetes.

Insulin merupakan elemen utama kelangsungan hidup penderita DM tipe-1. Terapi insulin pertama kali digunakan pada tahun 1922, berupa insulin regular (kerja pendek), yang diberikan sebelum makan dan ditambah sekali pada malam hari. Insulin jenis ini mulai bekerja pada 0.5-0.15 jam dan lama kerjanya 3-5 jam. Dengan adanya pemberian insulin eksogen ini nantinya dapat menjamin ketersediaan kadar insulin yang cukup di dalam tubuh selama 24 jam untuk memenuhi kebutuhan pasien.

2.2 Model Glukosa Darah-Insulin

Pada bagian ini dibahas model matematika dari glukosa darah-insulin. Dalam membangun model matematika untuk kadar glukosa darah-insulin digunakan dua konsentrasi, yaitu:

G : Kadar glukosa dalam darah

H : Kadar insulin dalam darah

Laju perubahan kadar glukosa dalam darah dipengaruhi oleh kadar glukosa, kadar insulin, dan suplai glukosa dari luar, seperti asupan makanan.

$$\frac{dG}{dt} = F_1(G, H) + p \quad (2.1)$$

Sedangkan laju perubahan kadar insulin dalam darah

dipengaruhi oleh kadar glukosa, kadar insulin, dan suplai insulin dari luar, seperti suntik insulin atau infus insulin lewat pompa insulin.

$$\frac{dH}{dt} = F_2(G, H) + r \quad (2.2)$$

Pada saat pasien berpuasa, G dan H mencapai nilai kesetimbangan yaitu:

G_0 : nilai kesetimbangan kadar glukosa dalam darah

H_0 : nilai kesetimbangan kadar insulin dalam darah

Misalkan g adalah penyimpangan kadar glukosa dari nilai kesetimbangan dan h adalah penyimpangan kadar insulin dari nilai kesetimbangan maka

$$\begin{aligned} g &= G - G_0 \rightarrow \dot{g} = \dot{G} \\ h &= H - H_0 \rightarrow \dot{h} = \dot{H} \end{aligned}$$

g dan h tersebut disubstitusikan ke persamaan (2.1) dan (2.2), sehingga didapat

$$\frac{dg}{dt} = F_1(G_0 + g, H_0 + h) + p \quad (2.3)$$

$$\frac{dh}{dt} = F_2(G_0 + g, H_0 + h) + r \quad (2.4)$$

F_1 dan F_2 diekspansikan menggunakan deret Taylor, sehingga persamaannya menjadi,

$$\begin{aligned} F_1(G_0 + g, H_0 + h) &= F_1(G_0, H_0) + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial g} g \\ &\quad + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial h} h \\ F_2(G_0 + g, H_0 + h) &= F_2(G_0, H_0) + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial g} g \\ &\quad + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial h} h \end{aligned}$$

Diketahui $F_1(G_0, H_0) = 0$ dan $F_2(G_0, H_0) = 0$ maka diperoleh

$$F_1(G_0 + g, H_0 + h) = \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial g}g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial h}h \quad (2.5)$$

$$F_2(G_0 + g, H_0 + h) = \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial g}g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial h}h \quad (2.6)$$

diasumsikan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial g} &= m_1 & ; & & \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial h} &= m_2 \\ \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial h} &= m_3 & ; & & \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial g} &= m_4 \end{aligned}$$

Berikut merupakan sistem regulasi glukosa darah-insulin yang memungkinkan untuk menentukan tanda-tanda parameter dalam persamaan (2.5) dan (2.6).

Dengan demikian, maka persamaan (2.3) dan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai berikut

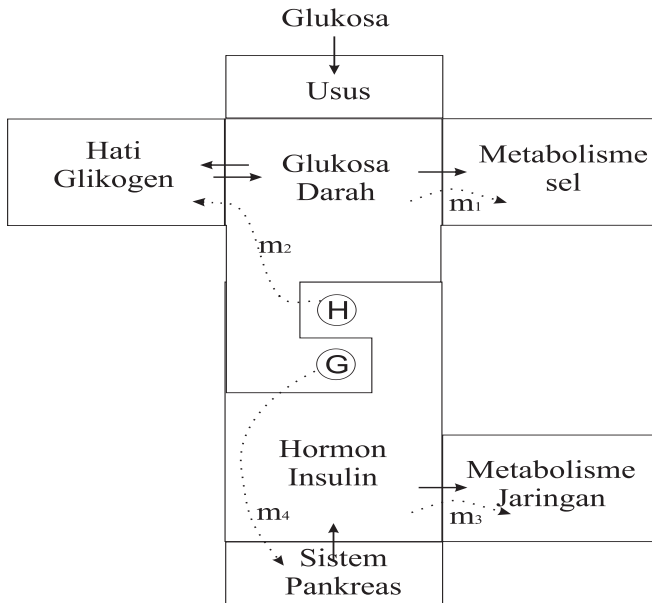
$$\frac{dg}{dt} = -m_1g - m_2h + p \quad (2.7)$$

$$\frac{dh}{dt} = -m_3h + m_4g + r \quad (2.8)$$

dengan

- m_1 : nilai *self-removal* glukosa
- m_2 : pengurangan kadar glukosa dengan insulin
- m_3 : nilai *self-removal* insulin
- m_4 : penambahan insulin darah dengan glukosa
- p : rate suplai glukosa dari luar
- r : ratet suplai insulin dari luar

model tersebut adalah model kadar glukosa darah-insulin Ackerman[5]. Model ini akan digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal kadar glukosa darah-insulin.



Gambar 2.1: Sistem Regulasi Glukosa Darah-Insulin

Diasumsikan bahwa penyimpangan kadar glukosa dan kadar insulin dalam darah dari nilai setimbangnya dapat berubah-ubah pada waktu t , sehingga g dan h dinyatakan sebagai fungsi waktu yaitu $g(t)$ dan $h(t)$, begitupun juga suplai glukosa dan insulin yang dinyatakan sebagai p dan r . Pada Tugas Akhir ini, suplai insulin dari luar dijadikan sebagai kendali sehingga r dinyatakan sebagai variabel kendali u . Pada kasus Diabetes Mellitus Tipe-1, insulin tidak dapat diproduksi oleh pankreas sehingga $m_4 = 0$. Selain itu tidak ada penambahan suplai glukosa dari luar (*eksogenous*), hal ini berarti $p(t) = 0$. Dengan demikian, model sistem dinamik pada persamaan (2.7) dan (2.8) dapat dinyatakan sebagai

berikut:

$$\frac{dg}{dt} = -m_1g(t) - m_2h(t) \quad (2.9)$$

$$\frac{dh}{dt} = -m_3h(t) + u \quad (2.10)$$

dengan kendali yang terbatas pada $0 \leq u(t) \leq 80$, 0 merupakan batas bawah dari $u(t)$ dan 80 merupakan batas atas dari $u(t)$ [12].

2.3 Sifat-sifat Sistem

Pada bagian ini diberikan beberapa teori sifat-sifat sistem yaitu teori kestabilan, teori keterkontrolan, dan teori keteramatan[10].

2.3.1 Teori Kestabilan

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan dari persamaan differensial $\dot{x} = Ax$, dimana matriks A mempunyai peranan penting khususnya nilai karakteristik dari matriks A yaitu bagian real dari λ yang dinotasikan oleh $Re\{\lambda\}$.

Teorema 2.1 *Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k (k \leq n)$.*

- *Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimotik bila dan hanya bila $Re\{\lambda_i\} < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.*
- *Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil bila dan hanya bila $Re\{\lambda_i\} \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re\{\lambda_i\} = 0$, multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometri.*
- *Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah takstabil bila dan hanya bila $Re\{\lambda_i\} > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re\{\lambda_i\} = 0$ dan multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometri.*

2.3.2 Teori Keterkendalian

Pada sistem linier invarian-waktu yang disajikan oleh persamaan:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

Theorema berikut memberikan syarat perlu dan cukup bahwa sistem (2.11) adalah terkendali.

Teorema 2.3 Syarat perlu dan cukup sistem (2.11) terkendali adalah:

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$ non-singulir.
2. Matriks: $M_c = (B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B)$ mempunyai rank sama dengan n .

2.3.3 Teori Keteramatan

Diberikan suatu pernyataan dalam suatu theorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati.

Teorema 2.2 *Syarat perlu dan cukup sistem (2.11) teramati adalah:*

1. *Matriks $m(0, t) = \int_0^t e^{a^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$ non-singulir*
2. *Matriks keteramatan*

$$M_0 = \begin{pmatrix} C \\ \text{---} \\ CA \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ CA^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

mempunyai rank sama dengan n .

2.4 Teori Kendali Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari kendali optimal adalah menentukan kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai[6]. Adapun formulasi masalah kendali optimal terdiri dari:

1. Mendeskripsikan secara matematis suatu sistem (model).
2. Menentukan fungsi objektif (*performance index*).
3. Menentukan kendala dan kondisi batas yang harus dipenuhi.

Secara umum, masalah kendali optimal diformulasikan dengan tujuan mencari kendali $u(t)$ yang mengoptimalkan (maksimum/minimum) *performance index*

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt \quad (2.12)$$

dengan kendala:

$$\dot{x} = g(x(t), u(t), t) \quad (2.13)$$

dan keadaan awal $x(t_0) = x_0$ dan keadaan akhir $x(t_f) = x_f$ serta $u(t)$ yang menyatakan pengendali keadaan pada waktu t . Bentuk umum persamaan J di atas disebut fungsi tujuan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Mayer dan f adalah bentuk Lagrange. Dengan kondisi sistem yaitu waktu akhir tetap atau bebas dan keadaan (*state*) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap.

2.5 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal dengan kendala yang terbatas. Metode tersebut digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik. Hal ini dikembangkan oleh L. S. Pontryagin pada tahun 1950. Diberikan permasalahan dengan suatu kendali yang terbatas sebagai berikut[12]:

$$\min \int_{t_0}^{t_f} f(x, u, t) \, dt \quad (2.14)$$

dengan kendala:

$$\dot{x} = g(x, u, t) \quad (2.15)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$a \leq u \leq b \quad (2.16)$$

Misalkan J dinotasikan sebagai persamaan (2.14), setelah ditambahkan persamaan (2.15) dengan pengali dan integrasi, dapat dihitung variasi dari J yang dinotasikan δJ , pada bagian yang linier dari $J - J^*$.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [(f_x + \lambda g_x + \lambda')\delta x + (f_u + \lambda g_u)\delta u] \, dt - \lambda(t_1)\delta x(t_1) \quad (2.17)$$

ambil λ untuk memenuhi,

$$\lambda' = -(f_x + \lambda g_x) \quad , \quad \lambda(t_1) = 0 \quad (2.18)$$

sehingga persamaan (2.17) dapat direduksi menjadi,

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (f_u + \lambda g_u)\delta u \, dt \quad (2.19)$$

Untuk mendapatkan solusi yang optimal dari x, u, λ , maka

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (f_u + \lambda g_u) \delta u \, dt \leq 0 \quad (2.20)$$

yang diperlukan untuk memodifikasi δu . Modifikasi yang memungkinkan adalah (2.20). Jika kendali optimal pada batas bawah a untuk t , maka modifikasi kendali $a + \delta u$, sehingga diperlukan $\delta u \geq 0$. Dengan cara yang sama, jika kendali optimal pada batas atas b untuk t , maka modifikasi yang diperlukan adalah $\delta u \leq 0$. Kesimpulannya

$$\begin{aligned} \delta u &\geq 0, & \text{jika } u &= a \\ \delta u &\leq 0, & \text{jika } u &= b \\ \delta u &\text{fisibel}, & \text{jika } a < u < b \end{aligned} \quad (2.21)$$

Misalnya, jika $u^*(t) = a$, berdasarkan pada (2.21) diperlukan $\delta u \geq 0$ dan $(f_u + \lambda g_u) \delta u \leq 0$ jika hanya jika $f_u + \lambda g_u \leq 0$. Dengan cara yang sama, jika $u^*(t) = b$, maka diperlukan $\delta u \leq 0$ dan $(f_u + \lambda g_u) \delta u \leq 0$ jika hanya jika $f_u + \lambda g_u \geq 0$. Dan jika $a < u^*(t) < b$, maka $(f_u + \lambda g_u) \delta u \leq 0$ jika hanya jika $f_u + \lambda g_u = 0$ pada t , atau ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} f_u + \lambda g_u &< 0 & \text{dengan } u(t) &= a \\ f_u + \lambda g_u &= 0 & \text{dengan } a < u(t) < b \\ f_u + \lambda g_u &> 0 & \text{dengan } u(t) &= b \end{aligned} \quad (2.22)$$

berarti jika x^*, u^* penyelesaian dari (2.14) - (2.16), maka harus terdapat fungsi λ sedemikian sehingga x^*, u^*, λ^* memenuhi (2.15), (2.16), (2.18), dan (??). Syarat kondisi tersebut dapat diperluas dengan persamaan Hamiltonian,

$$H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t)$$

dengan persamaan keadaan (state/costate),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

Untuk kondisi pada persamaan Hamiltonian tersebut, dapat diperluas dengan meminimumkan fungsi tujuan (2.15), yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) \quad (2.23)$$

dengan kendala,

$$a \leq u \leq b \quad (2.24)$$

Berdasarkan kendala dan fungsi obyektif dengan pengali penalty w_1, w_2 , a adalah batas bawah dari u , dan b adalah batas atas dari u , maka persamaan Lagrangian yang terbentuk dari (2.23) dan (2.24) adalah:

$$L = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) + w_1(u - a) + w_2(b - u) \quad (2.25)$$

Sehingga didapatkan keadaan yang mendekati kondisi untuk fungsi kendala terhadap u sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = f_u + \lambda g_u + w_1 - w_2 = 0 \quad (2.26)$$

$$w_1 \geq 0 \quad w_1(u - a) = 0 \quad (2.27)$$

$$w_2 \geq 0 \quad w_2(b - u) = 0 \quad (2.28)$$

Berdasarkan perbedaan antara keadaan dimana t_f dan *state* pada waktu akhir $x(t_f)$, sistem dibedakan menjadi lima tipe yaitu: sistem dengan waktu akhir dan *state* pada waktu akhir ditentukan, sistem dengan waktu akhir tidak ditentukan

dan *state* pada waktu akhir ditentukan, sistem dengan waktu akhir ditentukan dan *state* pada waktu akhir tidak ditentukan, sistem dengan t_f dan $x(t_f)$ tidak ditentukan keduanya, dengan $x(t_f)$ merupakan fungsi yang bergantung pada waktu akhir, dan sistem dengan waktu akhir dan $x(t_f)$ tidak ditentukan keduanya, dengan $x(t_f)$ dan t_f tidak berhubungan [10].

Adapun sistem yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah sistem dengan waktu akhir ditentukan dan *state* pada waktu akhir tidak ditentukan. Dalam sistem tersebut, karena t_f ditentukan maka δt_f bernilai nol dan karena $x(t_f)$ tidak ditentukan maka δx_f bernilai sebarang, sehingga batas untuk sistem ini adalah [10]:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)_{t_f} &= 0 \\ \lambda^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.6 Runge Kutta Orde-4

Metode Runge Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dalam persamaan differensial. Metode Runge Kutta memberikan ketelitian yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi.

Misal diberikan persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.30)$$

dan pendekatan awal (t_0, y_0) . Dengan metode Euler, diperoleh penyelesaian dari persamaan (2.30) sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \hat{h}f(t_n, y_n) \quad (2.31)$$

dengan $k = \Delta t$. Pada metode ini Runge Kutta Orde-4, digunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu k_1, k_2, k_3 , dan k_4 pada fungsi penyelesaian persamaan (2.31), sehingga penyelesaian dari persamaan (2.30) adalah sebagai berikut[13]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.32)$$

dengan,

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \Delta x \\ k_1 &= \hat{h}f(t_n, y_n) \\ k_2 &= \hat{h}f\left(t_n + \frac{\hat{h}}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \hat{h}f\left(t_n + \frac{\hat{h}}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \hat{h}f\left(t_n + \hat{h}, y_n + k_3\right) \end{aligned}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini diuraikan langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam menyelesaikan permasalahan dalam Tugas Akhir. Metode penelitian dalam Tugas Akhir ini terdiri atas tujuh tahap, antara lain: studi literatur, mengkaji model glukosa darah-insulin, analisis sifat sistem, menentukan formulasi masalah kendali optimal, menentukan penyelesaian kendali optimal, melakukan simulasi, analisis hasil simulasi, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap pertama ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi-referensi yang menunjang dalam menyelesaikan Tugas Akhir. Referensi bisa berupa buku-buku, jurnal, paper, maupun artikel yang terkait melalui diskusi dengan dosen dan mahasiswa. Langkah selanjutnya yaitu mengkaji pengertian, dasar teori, serta artikel terkait yang dibutuhkan dalam Tugas Akhir.

3.2 Mengkaji Model Glukosa Darah-Insulin

Dalam memahami model glukosa darah-insulin dilakukan pengkajian model sehingga dapat disusun asumsi-asumsi tertentu, yang selanjutnya dapat dibuat model sederhana dari sistem regulasi glukosa darah-insulin.

3.3 Analisis Sifat Sistem

Dari model dinamik glukosa darah- insulin akan dianalisis mengenai sifat-sifat dari sistem yang terdiri dari analisis kestabilan, analisis keterkendalian, dan analisis keteramatan.

3.4 Menentukan Formulasi Masalah Kendali Optimal

Pada tahapan ini, ditentukan formulasi masalah kendali optimal yang meliputi sistem dinamik, fungsi objektif, dan kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

3.5 Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kendali optimal yang telah diformulasikan pada tahapan sebelumnya. Metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah tersebut adalah Prinsip Minimum Pontryagin (PMP). Langkah-langkah yang dilakukan dalam tahap ini antara lain:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian
2. Menentukan persamaan *state* dan *costate*,
3. Membentuk persamaan Lagrangian dalam daerah pengendali, dengan kendali yang terbatas pada $a \leq u(t) \leq b$,
4. Menentukan kondisi stasioner, sehingga diperoleh bentuk kendali optimal $u^*(t)$, serta diperoleh kondisi batas pada pengendali,
5. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi,

3.6 Simulasi

Pada tahap ini, dilakukan simulasi dari permasalahan kendali optimal dengan memanfaatkan persamaan *state* dan *costate*, persamaan kendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi. Sebelumnya akan dilakukan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4. Kemudian disimulasikan menggunakan *Software* MATLAB untuk melihat performansi grafik yang dihasilkan. Dalam hal ini, akan dibandingkan simulasi dari hasil sebelum dan sesudah penerapan kendali optimal dilakukan.

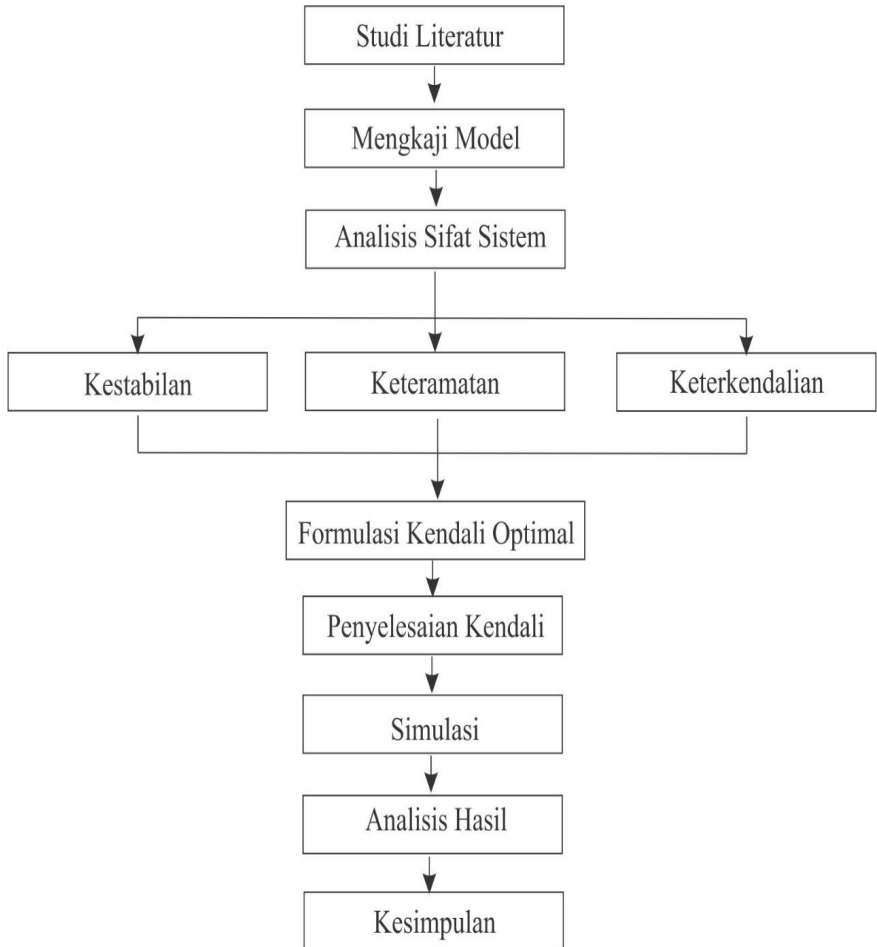
3.7 Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis dari hasil yang diperoleh dari simulasi yang telah dilakukan sebelumnya.

3.8 Penarikan Kesimpulan

Pada tahap akhir ini, dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai kendali optimal pada terapi insulin penderita Diabetes Mellitus Tipe-1. Kemudian dilakukan juga pemberian saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

Adapun alur penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai kendali optimal pada model glukosa darah-insulin. Pembahasan dimulai dengan penjelasan model glukosa darah-insulin. Kemudian dilanjutkan dengan analisis sifat sistem dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Setelah itu, pada akhir pembahasan diberikan analisis hasil simulasi untuk menunjukkan pengaruh kendali optimal terhadap glukosa darah-insulin.

4.1 Analisis Sifat Sistem

Berdasarkan Persamaan keadaan yang diberikan oleh persamaan (2.9) dan (2.10), dapat dibentuk *state space* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{g}(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 0 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 0 & -m_3 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.1.1 Analisis Kestabilan

Kestabilan suatu sistem dapat dilihat dari nilai karakteristik (*eigen*). Untuk mengetahuinya maka dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

$$\det(\hat{\lambda}I - A) = 0$$

Berdasarkan *state space* pada persamaan (4.1), maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \hat{\lambda} + m_1 & m_2 \\ 0 & \hat{\lambda} + m_3 \end{pmatrix} &= 0 \\ (\hat{\lambda} + m_1)(\hat{\lambda} + m_3) &= 0 \end{aligned}$$

sehingga didapat nilai karakteristik dari A , yaitu $\hat{\lambda}_1 = -m_1$ atau $\hat{\lambda}_2 = -m_3$. Berdasarkan Theorema 2.1, maka sistem dikatakan stabil asimtotik.

4.1.2 Analisis Keterkontrolan

Keterkontrolan dari suatu sistem dapat ditunjukkan oleh matriks terkontrol M_c yang ditentukan oleh pasangan matriks (A, B)

$$M_c = (B|AB|) \quad (4.2)$$

dengan

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 0 & -m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_2 \\ -m_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

maka didapat matriks keterkontrolan berdasarkan persamaan (4.2) sebagai berikut:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 \\ 1 & -m_3 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

terlihat bahwa $\text{rank } M_c = n = 2$, dan $\det(M_c) \neq 0$, berdasarkan Theorema 2.3 maka sistem dikatakan terkontrol.

4.1.3 Analisis Keteramatan

Syarat cukup suatu sistem dikatakan teramati jika matriks keteramatan (M_0) mempunyai rank sama dengan n

$$M_0 = \begin{pmatrix} C \\ - \\ CA \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ CA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 0 & -m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 - m_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sehingga didapat matriks keteramatan berdasarkan persamaan (4.4) sebagai berikut:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -m_1 & -m_2 - m_3 \end{bmatrix}$$

karena $\text{rank } M_0 = n = 2$ dan terlihat bahwa $\det(M_0) \neq 0$ maka berdasarkan Theorema 2.2 sistem dikatakan teramati.

4.2 Formulasi Kendali Optimal

Secara umum, formulasi kendali optimal terdiri dari model matematika sistem dinamik, fungsi objektif, dan kondisi batas yang harus dipenuhi. Berdasarkan model glukosa darah-insulin pada persamaan (2.9) dan (2.10) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= -m_1 g(t) - m_2 h(t) \\ \dot{h}(t) &= -m_3 h(t) + u(t) \end{aligned}$$

dengan keadaan awal:

$$\begin{aligned}g(t_0) &= g(0) \\h(t_0) &= h(0)\end{aligned}$$

dan keadaan akhir:

$$\begin{aligned}g(t_f) &= g_{f_1} \\h(t_f) &= h_{f_2}\end{aligned}$$

dengan t_f adalah waktu akhir yang ditentukan (*fixed final time*). Sedangkan variabel pengendali diberikan oleh persamaan berikut:

$$0 \leq u(t) \leq 80, \quad t \in I = [t_0, t_f]$$

Permasalahan ini bertujuan untuk mendapatkan kendali optimal yang dapat meminimumkan biaya implementasi. Terdapat dua aspek yang diminimumkan. Aspek pertama adalah penyimpangan kadar glukosa darah dari nilai setimbang. Kemudian yang kedua ialah biaya pengendalian suplai insulin dari luar. Kedua aspek tersebut dinyatakan ke dalam fungsi objektif sebagai berikut:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{\eta(g(t))^2 + \rho(u(t))^2\} dt \quad (4.5)$$

dengan:

- η : bobot penyimpangan kadar glukosa darah dari nilai setimbangnya $\eta > 0$
- ρ : bobot biaya suplai insulin dari luar $\rho > 0$

4.3 Penyelesaian Kendali Optimal

Dalam menyelesaikan model dinamik glukosa darah-insulin dengan menggunakan kendali optimal, hal pertama

yang harus dilakukan adalah membentuk fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H &= H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\
 &= f(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t) \\
 &= \eta(g(t))^2 + \rho(u(t))^2 + \lambda_1(t)(-m_1g(t) - m_2h(t)) + \\
 &\quad \lambda_2(t)(-m_3h(t) + u(t)) \\
 &= \eta g^2(t) + \rho u^2(t) - m_1g(t)\lambda_1(t) - m_2h(t)\lambda_1(t) - \\
 &\quad m_3h(t)\lambda_2(t) + u(t)\lambda_2(t)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Kendali optimal diperoleh dengan meminimumkan persamaan keadaan dari semua kendali terhadap daerah pengendali, sedangkan variabel yang lain dianggap sebagai konstanta. Dengan kata lain, akan dicari kondisi stasionernya, sehingga kondisi yang perlu dibentuk oleh Prinsip Minimum Pontryagin adalah kondisi stasioner dari persamaan *state* dan persamaan *costate*. Berdasarkan persamaan (4.6) diperoleh

a. Persamaan *State*

Untuk mendapatkan persamaan *state* langkahnya adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} \tag{4.7}$$

- Persamaan untuk $\dot{g}(t)$

Berdasarkan persamaan (4.7), untuk mendapatkan persamaan *state* pada $\dot{g}(t)$ maka dilakukan penurunan H terhadap λ_1 , sehingga dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \dot{g}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1(t)} \\
 &= -m_1g(t) - m_2h(t)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

- Persamaan untuk $\dot{h}(t)$

Berdasarkan persamaan (4.7), untuk mendapatkan persamaan *state* pada $\dot{h}(t)$ maka dilakukan penurunan H terhadap λ_2 , sehingga dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2(t)} \\ &= -m_3 h(t) + u(t)\end{aligned}\quad (4.9)$$

- b. Persamaan *Costate*

Untuk mendapatkan persamaan *costate* langkahnya adalah sebagai berikut:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} \quad (4.10)$$

- Persamaan untuk $\dot{\lambda}_1(t)$

Berdasarkan persamaan (4.10), untuk mendapatkan persamaan *costate* pada $\dot{\lambda}_1(t)$ maka dilakukan penurunan H terhadap g , sehingga dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial g(t)} \\ &= -(2\eta g(t) - m_1 \lambda_1(t)) \\ &= -2\eta g(t) + m_1 \lambda_1(t)\end{aligned}\quad (4.11)$$

- Persamaan untuk $\dot{\lambda}_2(t)$

Berdasarkan persamaan (4.10), untuk mendapatkan persamaan *costate* pada $\dot{\lambda}_2(t)$ maka dilakukan penurunan H terhadap h , sehingga

dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial h(t)} \\
 &= -(-m_2\lambda_1(t) - m_3\lambda_2(t)) \\
 &= m_2\lambda_1(t) + m_3\lambda_2(t) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Untuk kendala yang terbatas pada $0 \leq u(t) \leq 80$, maka dapat dibentuk persamaan Lagrangian, yang menambahkan persamaan Hamiltonian pada (4.6) dengan pengali penalty w_1 dan w_2 yang memenuhi kondisi berikut,

$$\begin{aligned}
 w_1 &\geq 0 & ; & & w_1(u(t)) &= 0 \\
 w_2 &\geq 0 & ; & & w_2(80 - u(t)) &= 0
 \end{aligned}$$

maka berdasarkan persamaan (2.25), dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L &= \eta(g(t))^2 + \rho(u(t))^2 + \lambda_1(t)(-m_1g(t) - m_2h(t)) + \\
 &\quad \lambda_2(t)(-m_3h(t) + u(t)) + w_1u(t) + w_2(80 - u(t)) \\
 &= \eta g^2(t) + \rho u^2(t) - m_1\lambda_1(t)g(t) + \\
 &\quad m_2\lambda_1(t)h(t) - m_3\lambda_2(t)h(t) + \lambda_2(t)u(t) + \\
 &\quad w_1u(t) + 80w_2 - w_2u(t) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan kondisi stasioner dari persamaan Lagrangian (4.13) untuk menentukan persamaan kendali optimal.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial u(t)} &= 0 \\
 2\rho u^*(t) + \lambda_2^*(t) + w_1 - w_2 &= 0 \\
 2\rho u^*(t) &= -\lambda_2^*(t) - w_1 + w_2 \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

dari persamaan (4.14) dapat diperoleh bentuk kendali optimal $u^*(t)$ yaitu

$$u^*(t) = \frac{-\lambda_2^*(t) - w_1 + w_2}{2\rho} \quad (4.15)$$

Ada tiga kemungkinan dalam menentukan kendali optimal pada (4.15), yaitu

- i. jika $u^*(t) = 0$, $w_1 \geq 0$ maka $w_2 = 0$ sehingga (4.15)

menjadi,

$$0 = \frac{-\lambda_2^*(t) - w_1}{2\rho}$$

karena $w_1 \geq 0$, maka

$$\frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho} \leq 0$$

karena $u^*(t) = 0$ maka pertidaksamaannya ekuivalen dengan,

$$\frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho} \leq u^*(t)$$

- ii. jika $0 < u^*(t) < 80$ maka $w_1 = w_2 = 0$ sehingga nilai dari

$u^*(t)$ yaitu,

$$u^*(t) = \frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho}$$

- iii. jika $u^*(t) = 80$, $w_2 \geq 0$ maka $w_1 = 0$ sehingga (4.15)

menjadi,

$$80 = \frac{-\lambda_2^*(t) + w_2}{2\rho}$$

karena $w_2 \geq 0$, maka

$$\frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho} \geq 80$$

karena $u^*(t) = 80$ maka pertidaksamaannya ekuivalen dengan,

$$\frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho} \geq u^*(t)$$

dari persamaan (i),(ii), dan (iii) dapat dibentuk,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \text{jika } \alpha \leq 0 \\ \alpha & , \text{jika } 0 < \alpha < 80 \\ 80 & , \text{jika } \alpha \geq 80 \end{cases} \quad (4.16)$$

atau ditulis kembali sebagai berikut:

$$u^*(t) = \max\{0, \min(\alpha, 80)\} \quad (4.17)$$

dengan

$$\alpha = -\frac{\lambda_2^*(t)}{2\rho} \quad (4.18)$$

Berdasarkan penyelesaian kendali optimal tersebut, dapat dituliskan kembali persamaan *state* dan *costate* yang optimal sebagai berikut:

$$\dot{g}^*(t) = -m_1 g^*(t) - m_2 h^*(t) \quad (4.19)$$

$$\dot{h}^*(t) = -m_3 h^*(t) + \max\{0, \min(\alpha, 80)\} \quad (4.20)$$

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = -2\eta g^*(t) + m_1 \lambda_1^*(t) \quad (4.21)$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = m_2 \lambda_1^*(t) + m_3 \lambda_2^*(t) \quad (4.22)$$

dengan kondisi awal:

$$g(t_0) = g(0)$$

$$h(t_0) = h(0)$$

Formulasi kendali optimal pada permasalahan ini menggunakan sistem dengan state akhir tidak ditentukan (*free final state*) dan waktu akhir ditentukan (*fixed final time*), sehingga berdasarkan (2.29) kondisi transversalitasnya adalah:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)_{t_f} &= 0 \\ \lambda^*(t) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f} \end{aligned} \quad (4.23)$$

dengan S adalah bentuk Mayer dari fungsi obyektif, dan dikarenakan pada fungsi obyektif tidak terdapat bentuk ini maka $S = 0$, maka diperoleh kondisi transversal untuk λ_1 yaitu,

$$\begin{aligned}\lambda_1^*(t) &= \left(\frac{\partial S}{\partial g} \right)_{*t_f} \\ \lambda_1^*(t) &= 0\end{aligned}$$

dan diperoleh kondisi transversal untuk λ_2 yaitu,

$$\begin{aligned}\lambda_2^*(t) &= \left(\frac{\partial S}{\partial h} \right)_{*t_f} \\ \lambda_2^*(t) &= 0\end{aligned}$$

4.4 Solusi Numerik

Dalam Tugas Akhir ini, persamaan *state* dan *costate* diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4. Metode ini merupakan satu dari banyak metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan differensial secara numerik. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan \hat{h} , yang merupakan langkah waktu (*step size*).

Berdasarkan persamaan *state* dan *costate* pada (4.19-4.22) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{g}(t) &= -m_1g(t) - m_2h(t) \\ &= f_1(g(t), h(t), u(t)) \\ \dot{h}(t) &= -m_3h(t) + u(t) \\ &= f_2(g(t), h(t), u(t)) \\ \dot{\lambda}_1(t) &= -2\eta g(t) + m_1\lambda_1(t) \\ &= y_1(g(t), h(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= m_2\lambda_1(t) + m_3\lambda_2(t) \\ &= y_2(g(t), h(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t))\end{aligned}$$

Persamaan *state* akan diselesaikan dengan menggunakan metode *Forward Sweep*, sedangkan *costate* diselesaikan dengan menggunakan metode *Backward Sweep*. Berikut ini langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*:

a. Langkah 1

Interval waktu $t = [0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval, sehingga persamaan *state* dan *costate* dapat dituliskan sebagai berikut:

- Untuk persamaan *state* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\vec{g} &= (g_1, g_2, \dots, g_{n+1}) \\ \vec{h} &= (h_1, h_2, \dots, h_{n+1})\end{aligned}$$

- Untuk persamaan *costate* dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_1 &= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \\ \vec{\lambda}_2 &= (\lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})\end{aligned}$$

Artinya terdapat $n + 1$ titik di sepanjang waktu t , sehingga dapat diperoleh selisih antara setiap titiknya adalah $\hat{h} = \frac{t_f}{n}$

b. Langkah 2

Memberikan asumsi nilai awal pada kendali $u(t)$ di sepanjang interval t untuk mengawali integrasi.

c. Langkah 3

Menggunakan nilai awal $g(0) = g_0$ dan $h(0) = h_0$ serta asumsi nilai awal $u(t)$ pada langkah 2, untuk menyelesaikan persamaan *state* dengan metode *forward*

sweep. Berikut merupakan rumus Runge Kutta Orde-4 untuk persamaan *state*:

$$\begin{aligned} g(t + \hat{h}) &= g(t) + \frac{1}{6}(k_{1,g} + 2k_{2,g} + 2k_{3,g} + k_{4,g}) \\ h(t + \hat{h}) &= h(t) + \frac{1}{6}(k_{1,h} + 2k_{2,h} + 2k_{3,h} + k_{4,h}) \end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned} k_{1,g} &= \hat{h}f_1(g(t), h(t), u(t)) \\ &= \hat{h}(-m_1g(t) - m_2h(t)) \\ k_{1,h} &= \hat{h}f_2(g(t), h(t), u(t)) \\ &= \hat{h}(-m_3h(t) + u(t)) \\ k_{2,g} &= \hat{h}f_1(g(t) + \frac{k_{1,g}}{2}, h(t) + \frac{k_{1,h}}{2}, u(t)) \\ &= \hat{h}\left(-m_1(g(t) + \frac{k_{1,g}}{2}) - m_2(h(t) + \frac{k_{1,h}}{2})\right) \\ k_{2,h} &= \hat{h}f_2(g(t) + \frac{k_{1,g}}{2}, h(t) + \frac{k_{1,h}}{2}, u(t)) \\ &= \hat{h}\left(-m_3(h(t) + \frac{k_{1,h}}{2}) + u(t)\right) \\ k_{3,g} &= \hat{h}f_1(g(t) + \frac{k_{2,g}}{2}, h(t) + \frac{k_{2,h}}{2}, u(t)) \\ &= \hat{h}\left(-m_1(g(t) + \frac{k_{2,g}}{2}) - m_2(h(t) + \frac{k_{2,h}}{2})\right) \\ k_{3,h} &= \hat{h}f_2(g(t) + \frac{k_{2,g}}{2}, h(t) + \frac{k_{2,h}}{2}, u(t)) \\ &= \hat{h}\left(-m_3(h(t) + \frac{k_{2,h}}{2}) + u(t)\right) \\ k_{4,g} &= \hat{h}((g(t) + k_{3,g}, h(t) + k_{3,h}, u(t))) \\ &= \hat{h}(-m_1(g(t) + k_{3,g}) - m_2(h(t) + k_{3,h})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,h} &= \hat{h}f_2(g(t) + k_{3,g}, h(t) + k_{3,h}, u(t)) \\
&= \hat{h}(-m_3(h(t) + k_{3,h}) + u(t))
\end{aligned}$$

d. Langkah 4

Langkah selanjutnya adalah dengan memisalkan $\lambda_1 t_f = \mu$. Diketahui batas transversal $\lambda_1 t_f = \lambda_2 t_f$, sehingga batas akhir yang digunakan adalah $\lambda_1 t_f = \lambda_2 t_f = \mu$. Selanjutnya hasil dari langkah 3 juga digunakan untuk menyelesaikan persamaa *costate* dengan menggunakan metode *backward sweep*. Berikut adalah rumus Runge Kutta Orde-4 untuk persamaan *costate*:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t - \hat{h}) &= \lambda_1(t) - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \\
\lambda_2(t - \hat{h}) &= \lambda_2(t) - \frac{1}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}) \\
k_{1,\lambda_1} &= \hat{h}y_1(\lambda_1(t), \lambda_2(t), g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h}(-2\eta g(t) + m_1\lambda_1(t))
\end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
k_{1,\lambda_2} &= \hat{h}y_2(\lambda_1(t), \lambda_2(t), g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h}(m_2\lambda_1(t) + m_3\lambda_2(t)) \\
k_{2,\lambda_1} &= \hat{h}y_1(\lambda_1(t) - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_2(t) - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h}\left(-2\eta g(t) + m_1(\lambda_1(t) - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2})\right) \\
k_{2,\lambda_2} &= \hat{h}y_2(\lambda_1(t) - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_2(t) - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h}\left(m_2(\lambda_1(t) - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}) + m_3(\lambda_2(t) - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2})\right) \\
k_{3,\lambda_1} &= \hat{h}y_1(\lambda_1(t) - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_2(t) - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, g(t), h(t), u(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{h} \left(-2\eta g(t) + m_1(\lambda_1(t) - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}) \right) \\
k_{3,\lambda_2} &= \hat{h} y_2(\lambda_1(t) - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_2(t) - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h} \left(m_2(\lambda_1(t) - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}) + m_3(\lambda_2(t) - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}) \right) \\
k_{4,\lambda_1} &= \hat{h} y_1(\lambda_1(t) - k_{3,\lambda_1}, \lambda_2(t) - k_{3,\lambda_2}, g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h} (-2\eta g(t) + m_1(\lambda_1(t) - k_{3,\lambda_1})) \\
k_{4,\lambda_2} &= \hat{h} y_2(\lambda_1(t) - k_{3,\lambda_1}, \lambda_2(t) - k_{3,\lambda_2}, g(t), h(t), u(t)) \\
&= \hat{h} (m_2(\lambda_1(t) - k_{3,\lambda_1}) + m_3(\lambda_2(t) - k_{3,\lambda_2}))
\end{aligned}$$

e. Langkah 5

Langkah yang terakhir yaitu memperbarui nilai $u(t)$ dengan mensubstitusikan nilai $g(t), h(t), \lambda_1(t)$, dan $\lambda_2(t)$ yang baru kedalam karakterisasi kendali optimal berikut:

$$u^*(t) = \max\{0, \min(-\lambda_2^*(t), 80)\} \quad (4.24)$$

4.5 Analisis Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini, diberikan nilai parameter yang digunakan untuk mensimulasikan permasalahan kendali optimal pada model glukosa darah-insulin selama 90 menit. Adapun nilai parameter yang digunakan seperti yang terdapat pada tabel 4.1[5]:

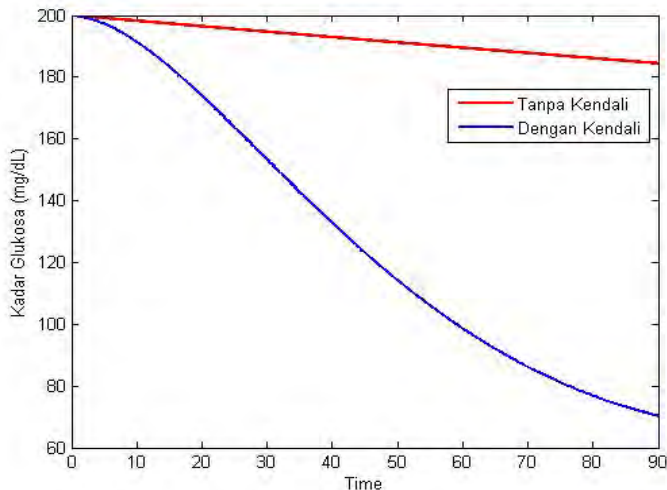
Pada simulasi ini, target akhir yang diinginkan untuk kadar glukosa darah dalam kisaran normal yaitu 70 - 120 mg/dL. Simulasi yang dilakukan adalah ketika pengontrol untuk tingkat suplai insulin dari luar ($u(t)$) bernilai nol. Artinya tidak ada kendali terhadap suplai insulin dari luar (*eksogenous*). Kemudian simulasi tersebut dibandingkan dengan adanya kendali, sehingga dapat terlihat pengaruh kendali optimal pada kadar glukosa darah-insulin.

Tabel 4.1: Input Parameter

Parameter	Nilai
m_1	0.0009
m_2	0.0031
m_1	0.0415
m_2	0
η	1
ρ	10

Simulasi yang pertama pada gambar 4.2 menunjukkan perilaku kadar glukosa darah tanpa kendali dan kadar glukosa darah dengan kendali selama 90 menit. Dari grafik tersebut terlihat bahwa kadar glukosa darah tanpa kendali dan kadar glukosa darah dengan kendali mengalami penurunan kadar glukosa darah. Kadar glukosa darah awal tanpa kendali adalah 200 mg/dL, kemudian menurun hingga menjadi 184.4267 mg/dL di menit ke-90. Demikian pula untuk kadar glukosa darah awal dengan kendali adalah 200 mg/dL, kemudian menurun hingga berada dalam kisaran normal yaitu 70.3154 mg/dL di menit ke-90. Berdasarkan grafik tersebut dapat dilihat bahwa kadar glukosa darah tanpa kendali mengalami penurunan namun penurunan yang terjadi sangat lambat dibandingkan dengan kadar glukosa darah dengan kendali. Hal ini terjadi karena penurunan kadar glukosa tanpa kendali, belum terdapat suplai insulin dari luar (*eksogenous*). Dengan kata lain, penurunan kadar glukosa darah tanpa kendali terjadi karena adanya metabolisme jaringan pada tubuh penderita DM Tipe-1. Sedangkan penurunan yang terjadi pada kadar glukosa darah dengan kendali dipengaruhi adanya suplai insulin dari luar (*eksogenous*) dengan adanya terapi pemberian yang dikendalikan secara optimal. Hal ini terjadi karena adanya metabolisme sel dan penyimpanan

kadar glukosa darah oleh insulin di dalam hati dalam bentuk *glycogen*.

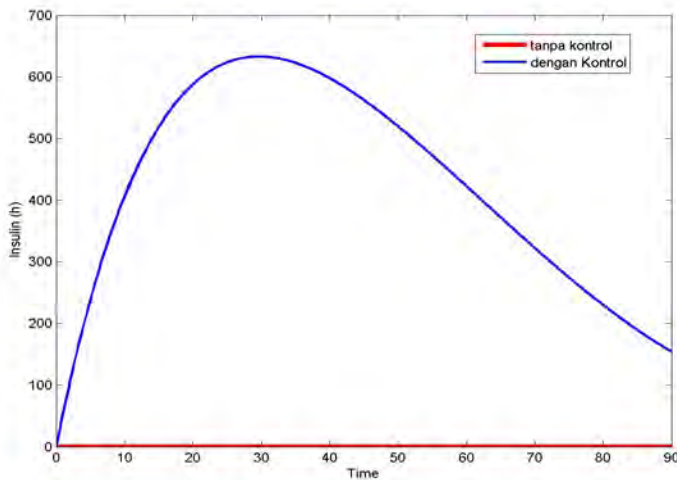


Gambar 4.1: Kadar Glukosa Darah degan Kendali dan Tanpa kendali

Pada Kasus ini, ketika kadar glukosa darah sudah mencapai kadar normal, maka pasien Diabetes Mellitus Tipe-1 dianjurkan untuk mengkonsumsi makanan. Jika tidak, maka penderita DM Tipe satu akan mengalami *Hipoglikemia* atau penurunan kadar glukosa darah dibawah batas normal. Hal ini akan mempengaruhi kinerja dari organ tubuh penderita, misalnya yang sering terjadi yaitu pasien akan menjadi lemas, pandangan mata kabur, kesulitan berbicara, kemudian pingsan, bahkan terjadi kematian jika tidak mendapat penanganan dengan baik.

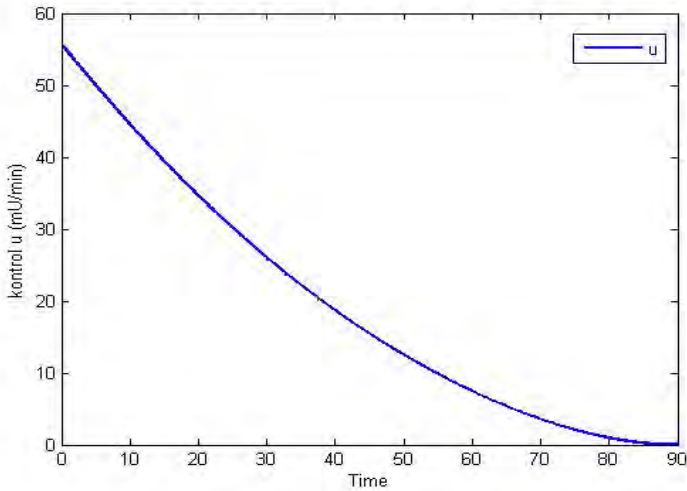
Simulasi berikutnya adalah ketika kadar insulin awal sama dengan nol, artinya produksi insulin oleh pankreas terhenti. Pada Gambar 4.3 dapat dilihat perbedaan antara kadar insulin tanpa kendali dan kadar insulin dengan kendali. Grafik tersebut memperlihatkan bahwa kadar insulin dengan kendali

mengalami peningkatan hingga menit ke-30. Hal ini terjadi karena adanya suplai insulin dari luar (*eksogenous*) sehingga kadar insulin dalam tubuh meningkat. Namun seiring berjalannya waktu, kadar insulin dalam tubuh mengalami penurunan hingga mencapai 154.2517 mU/L di menit ke-90. Hal ini akan terus terjadi penurunan hingga kadar insulin dalam tubuh kembali pada keadaan semula.



Gambar 4.2: Kadar Insulin Tanpa Kendali dan Kadar Insulin dengan Kendali

Simulasi yang terakhir menunjukkan skenario kendali yang digunakan dalam pensuplaian insulin dari luar (*eksogenous*) pada penderita DM Tipe-1. Pada gambar 4.4, terlihat bahwa tingkat suplai insulin dari luar (*eksogenous*) yang diberikan pada awal waktu yaitu sebesar 55.6378 mU, dan semakin lama mengalami penurunan hingga mendekati nol. Hal ini disebabkan karena kadar insulin dalam tubuh mengalami penurunan seiring dengan penurunan kadar glukosa darah pada tubuh penderita DM Tipe-1.



Gambar 4.3: kendali $u^*(t)$

Berikut dilakukan simulasi dengan 6 kadar glukosa awal yang berbeda. Adapun hasil dari simulasi tersebut dapat dilihat pada tabel 4.2. t_f adalah waktu yang ditentukan (*fixed final time*). Berdasarkan hasil simulasi tersebut, dapat terlihat bahwa semakin tinggi kadar glukosa darah pada penderita DM Tipe-1, maka semakin tinggi pula kendali suplai insulin *eksogenous* yang diberikan. Sehingga, kadar insulin dalam tubuh semakin meningkat. Dalam hal ini, semakin tinggi kadar glukosa untuk mencapai kadar glukosa darah normal, waktu yang dibutuhkan semakin lama. Hasil dari fungsi obyektif dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Berdasarkan hasil simulasi yang didapat, kendali optimal pada pemberian insulin *eksogenous* dapat menjadi solusi yang optimal untuk menurunkan kadar glukosa darah dalam kisaran normal. Semakin tinggi kadar glukosa darah, maka semakin

Tabel 4.2: Simulasi Kadar Glukosa Darah-insulin

Kadar GD Awal (mg/dL)	Kadar GD Akhir (mg/dL)	Kadar Insulin Dalam Tubuh Max (mU/L)	u Awal (mU)
200	70.3154	633.0058	55.6378
220	77.2868	696.3707	61.1852
240	84.3353	759.6987	66.8015
260	91.3594	823.0007	72.3591
280	98.3809	886.3029	77.8970
300	105.5102	949.2742	79.8438

tinggi suplai insulin *eksogenous* yang diberikan dan semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kadar glukosa darah normal. Selain itu, semakin tinggi suplai insulin yang

Tabel 4.3: Nilai Fungsi Obyektif

Kadar Glukosa Darah (mg/dL)	Fungsi Obyektif Dengan Kendali
200	4940.8194
220	5977.4040
240	7117.3849
260	8352.3494
280	9685.5444
300	11140.1569

diberikan, maka semakin tinggi pula kadar insulin dalam darah penderita DM Tipe-1.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan hasil simulasi yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- a. Penerapkan teori kendali optimal dengan fungsi obyektif yang dibentuk yaitu,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{ \eta(g(t))^2 + \rho(u(t))^2 \} dt$$

untuk meminimumkan suplai insulin *eksogenous* yang dapat menurunkan kadar glukosa darah secara optimal, dengan adanya kendali optimal sehingga diperoleh kendali sebagai berikut:

$$u^*(t) = \max\{0, \min(\frac{-\lambda_2^*(t)}{2\rho}, 80)\}$$

yang terbatas pada $0 \leq u(t) \leq 80$.

- b. Kendali awal $u = 55.6378$ diberikan ketika kadar glukosa darah mencapai 200 mg/dL, sehingga pada waktu 90 menit , kadar glukosanya menurun menjadi 70.3154 mg/dL.
- c. Semakin tinggi kadar glukosa darah, misalnya 300 mg/dL, maka semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai kadar glukosa normal yaitu 100 menit.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dibahas mengenai waktu yang optimal untuk menentukan kadar glukosa darah hingga mencapai kadar glukosa normal dan belum terdapat analisis dengan adanya suplai glukosa dari luar. Selain itu untuk pengembangan, sebaiknya dilakukan perbandingan dengan metode-metode kendali yang lain agar didapatkan pengendali yang terbaik untuk suplai insulin pada penderita Diabetes Mellitus Tipe-1. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Soewondo, P., (2011). **Konsensus Pengendalian dan Pencegahan Diabetes Mellitus di Indonesia.**Jakarta:PERKENI.
- [2] Tridjaja, B., (2009). **Konsensus Nasional Pengelolaan Diabetes Mellitus Tipe-1-Edisi 2.**Jakarta:BPIDAI.
- [3] Internasional Diabetes Federation., (2015). **Global Estimate of the Prevaence of Diabetes for 2013 and Projections for 2035 for IDF Diabetes Atlas.**
- [4] World Health Organization., (2015). **Raised Fasting Blood Glucose.**
- [5] Shiang, K. D.,(2010). **A Computational Model of Human Glucose-insulin Regulatory System.** Biomedical Reasearch.
- [6] Naidu, S. D., (2002). **Optimal Control System.** USA: CRC Press LLC.
- [7] Achikgoz, S. U., (2010). **Blood Glucose Regulation with Stochastic Optimal Control for Insulin-dependent Diabetic Patients.** Chemical Engineering Science.
- [8] Puigjaner, L., (2005). **European Symptial Equations on Computer Aided Process Engineering-15.**Amsterdam: Elsevier, pp 997.

- [9] Rusydiyah, R.,(2010). **Pengendalian Optimal pada Penanganan Diabetes dengan Metode Linear Quadratic Regulator**. Tugas Akhir Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [10] Subiono. (2013). **Linear Sistem dan Kontrol Optimal**. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [11] Kamien., Morton, I., and Schwartz, N .L., (1991). **Dynamic Optimization the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management Second Edition** . North Holland: North Western University, pp 185-187.
- [12] Lynch, S. M., Bequette, B. W., (2001). **Estimation-based Model Predictive Control of Blood Glucose in Type I Diabetics**. a Simulation Study in Proc. NEBC, pp 79-80.
- [13] Holmes, Mark. H., (2007). **Introduction to Numerical Methods in Differential Equations**. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

LAMPIRAN A

Source Code Matlab

```
function [y,ja] = tanpakontrol(f)

%parameter
formula=guidata(gcbo);
m1=str2double(get(formula.m1,'string'));
m2=str2double(get(formula.m2,'string'));
m3=str2double(get(formula.m3,'string'));
m4=str2double(get(formula.m4,'string'));

tf=str2double(get(formula.tf,'string'));
eta=str2double(get(formula.eta,'string'));
rho=str2double(get(formula.rho,'string'));

Ga0=str2double(get(formula.g0,'string'));
Ha0=str2double(get(formula.h0,'string'));
ua=0;
N = 1000;
t = linspace(0,tf,N+1);
h = tf/N;
h2 = h/2;

Ga =zeros(1,N+1);
Ha =zeros(1,N+1);

Ga(1) = Ga0;
Ha(1) = Ha0;
```

```

for i = 1:N
    k1Ga=h*(-m1*Ga(i) - m2*Ha(i));
    k2Ga=h*(-m1*(Ga(i)+k1Ga/2) - m2*(Ha(i)+h2));
    k3Ga=h*(-m1*(Ga(i)+k2Ga/2) - m2*(Ha(i)+h2));
    k4Ga=h*(-m1*(Ga(i)+k3Ga) - m2*(Ha(i)+h));

    k1Ha=h*(-m3*Ha(i) + m4*Ga(i) + ua);
    k2Ha=h*(-m3*(Ha(i)+k1Ha/2) + m4*(Ga(i)+h2) + ua);
    k3Ha=h*(-m3*(Ha(i)+k2Ha/2) + m4*(Ga(i)+h2) + ua);
    k4Ha=h*(-m3*(Ha(i)+k3Ha) + m4*(Ga(i)+h) + ua);

    Ga(i+1)= Ga(i) + (1/6)*(k1Ga + 2*k2Ga + 2*k3Ga + k4Ga);
    Ha(i+1)= Ha(i) + (1/6)*(k1Ha + 2*k2Ha + 2*k3Ha + k4Ha);
end

J1=eta*((Ga(1))^2) + rho*(ua^2);
for k=1:N
    J2=eta*((Ga(k+1))^2) + rho*(ua^2);
    J=0.5*(J1+J2);
    J1=J2;
end
ja=J;

y(1,:) = t;
y(2,:) = Ga;
y(3,:) = Ha;

```

```

function [y,jb] = dengankontrol(f)

%parameter
formula=guidata(gcbo);
m1=str2double(get(formula.m1,'string'));
m2=str2double(get(formula.m2,'string'));
m3=str2double(get(formula.m3,'string'));
m4=str2double(get(formula.m4,'string'));

tf=str2double(get(formula.tf,'string'));
eta=str2double(get(formula.eta,'string'));
rho=str2double(get(formula.rho,'string'));

Ga0=str2double(get(formula.g0,'string'));
Ha0=str2double(get(formula.h0,'string'));

N = 1000;
t = linspace(0,tf,N+1);
h = tf/N;
h2 = h/2;
test=-1;
delt = 0.001;

G=zeros(1,N+1);
H=zeros(1,N+1);
u=zeros(1,N+1);

```

```

lambda1=zeros(1,N+1); lambda1(N+1)=0;
lambda2=zeros(1,N+1); lambda2(N+1)=0;

G(1) = Ga0;
H(1) = Ha0;

while(test < 0)

    oldu=u;

    for i = 1:N
        k1G=h*(-m1*G(i) - m2*H(i));
        k2G=h*(-m1*(G(i)+k1G/2) - m2*(H(i)+h2));
        k3G=h*(-m1*(G(i)+k2G/2) - m2*(H(i)+h2));
        k4G=h*(-m1*(G(i)+k3G) - m2*(H(i)+h));

        k1H=h*(-m3*H(i) + m4*G(i) + u(i));
        k2H=h*(-m3*(H(i)+k1H/2) + m4*(G(i)+h2) + (0.5*(u(i)+u(i+1)))));
        k3H=h*(-m3*(H(i)+k2H/2) + m4*(G(i)+h2) + (0.5*(u(i)+u(i+1)))));
        k4H=h*(-m3*(H(i)+k3H) + m4*(G(i)+h) + u(i+1));

        G(i+1)= G(i) + (1/6)*(k1G + 2*k2G + 2*k3G + k4G);
        H(i+1)= H(i) + (1/6)*(k1H + 2*k2H + 2*k3H + k4H);
    end
end

```

```

for i = 1:N
    j = N + 2 - i;
    k11 = h*(-2*eta*(G(j)) + m1*lambda1(j) - m4*lambda2(j));
    k21 = h*(-2*eta*((0.5*(G(j)+G(j-1)))) + m1*(lambda1(j)
        + k11/2) - m4*(lambda2(j)+h2));
    k31 = h*(-2*eta*((0.5*(G(j)+G(j-1)))) + m1*(lambda1(j)
        + k21/2) - m4*(lambda2(j)+h2));
    k41 = h*(-2*eta*(G(j-1)) + m1*(lambda1(j)+k31)
        - m4*(lambda2(j)+h));

    k12 = h*(m2*lambda1(j) + m3*lambda2(j));
    k22 = h*(m2*(lambda1(j)+h2) + m3*(lambda2(j)+k12/2));
    k32 = h*(m2*(lambda1(j)+h2) + m3*(lambda2(j)+k22/2));
    k42 = h*(m2*(lambda1(j)+h) + m3*(lambda2(j)+k32));

    lambda1(j-1) = lambda1(j)-(1/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
    lambda2(j-1) = lambda2(j)-(1/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);
end

temp_1 = -lambda2/(2*rho);
u1 = max(0, min(80, temp_1));
u = 0.5*(u1 + oldu);
temp1 = delt*sum(abs(u)) - sum(abs(ordu - u));
test = temp1;
end

```

```
J1=eta*((G(1))^2) + rho*(u(1)^2);  
for k=1:N  
    J2=eta*((G(k+1))^2) + rho*((u(k+1))^2);  
    J=0.5*(J1+J2);  
    J1=J2;  
end  
    jb=J;  
  
y(1,:) = t;  
y(2,:) = G;  
y(3,:) = H;  
y(4,:) = u;
```


LAMPIRAN B

Source Code GUI

```
function varargout = gui130616(varargin)
% GUI130616 M-file for gui130616.fig
% Edit the above text to modify the response
% to help gui130616
% Last Modified by GUIDE v2.5 19-Jun-2016 12:52:22

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @gui130616_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @gui130616_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',    []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
```

```

% --- Executes just before gui130616 is made visible.
function gui130616_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = gui130616_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on button press in running.
function running_Callback(hObject, eventdata, handles)
global m1 m2 m3 m4 eta rho tf g0 h0 f ja jb
m1=str2double(get(handles.m1,'string'));
m2=str2double(get(handles.m2,'string'));
m3=str2double(get(handles.m3,'string'));
m4=str2double(get(handles.m4,'string'));
eta=str2double(get(handles.eta,'string'));
rho=str2double(get(handles.rho,'string'));
tf=str2double(get(handles.tf,'string'));
g0=str2double(get(handles.g0,'string'));
h0=str2double(get(handles.h0,'string'));
f=[tf 0];
[V,ja]=tanpakontrol(f);
[W,jb]=dengankontrol(f);

```

```

ja
jb
pilih=get(handles.popupmenu1,'value');
switch pilih
    case 1

    case 2
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        axes(handles.axes1);
        plot(V(1,:),V(2:,:),'-r','LineWidth',2);
        hold on;
        plot(W(1,:),W(2:,:),'-b','LineWidth',2);
        hold on;
        xlabel('Time');
        ylabel('Kadar Glukosa (mg/dL)');
        legend('Tanpa Kendali','Dengan Kendali',0);
        grid on
    case 3
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        axes(handles.axes1);
        plot(V(1,:),V(3:,:),'-r','LineWidth',3);
        hold on;

```

```

        plot(W(1,:),W(3,:), '-b', 'LineWidth', 2);
        hold on;
        xlabel('Time');
        ylabel('Kadar Insulin (mU/L)');
        legend('Tanpa Kendali', 'Dengan Kendali', 0);
        grid on
    case 4
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        axes(handles.axes1);
        plot(W(1,:),W(4,:), '-b', 'LineWidth', 2);
        hold on;
        xlabel('Time');
        ylabel('Kontrol u (mU/min)');
        legend('u', 0);
        grid on
end

% --- Executes on button press in reset.
function reset_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.m1, 'String', '');
set(handles.m2, 'String', '');
set(handles.m3, 'String', '');
set(handles.m4, 'string', '');

```

```

set(handles.eta,'string','');
set(handles.rho,'string','');
set(handles.tf,'string','');
set(handles.g0,'string','');
set(handles.h0,'string','');
set(handles.jb,'string','');
set(handles.popupmenu1,'Value',1);
cla(handles.axes1);
reset(gca);
legend('0');

function h0_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function h0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function g0_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function g0_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on selection change in popupmenu1.
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function popupmenu1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end


function m1_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function m1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

function m4_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function m4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function eta_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function eta_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function m2_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function m2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```



```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function rho Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function rho CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function m3 Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function m3 CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function tf Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function tf CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```



```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in hitung.
function hitung_Callback(hObject, eventdata, handles)

global m1 m2 m3 m4 eta rho tf g0 h0 f jb
set(handles.jb,'string',num2str(jb));

function jb_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function jb_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN C

Biodata Penulis



Penulis bernama Duwi Widayati, lahir di Mojokerto, 2 Juli 1994. Penulis merupakan anak terakhir dari dua bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Al-Usmani III Mojokerto (2000), SDN Kranggan V Mojokerto (2000-2006), SMP Negeri 4 Mojokerto (2006-2009), dan SMA Negeri 3 Mojokerto (2009-2012). Setelah lulus dari SMA, pada tahun 2012 penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur Undangan dengan NRP 1212 100 011. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui HIMATIKA ITS sebagai staf Departemen KESMA (2013-2014). Selain itu, penulis juga merupakan staf Keilmiahan di UKM Penalaran ITS (2014-2015).

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: duwi12@mhs.matematika.its.ac.id